ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки

Том 23, № 122 2018

DOI:10.20310/1810-0198-2018-23-122-180-186
УДК 517

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ОБЩИМ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© М. С. Афанасова

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1
E-mail: marya.afanasowa@ya.ru

Аннотация. В работе рассматривается задача Коши для функционально-дифференциального включения дробного порядка с общим начальным условием в банаховом пространстве.

Ключевые слова: дифференциальное включение; дробная производная; задача Коши; мера некомпактности; неподвижная точка; уплотняющее мультиотображение

Введение

Идеи Лейбница и Эйлера положили начало теории дифференциальных уравнений дробного порядка, однако эта тематика получила бурное развитие только в конце XX столетия, за счет осознания ее практического применения в различных отраслях естествознания таких как биология, экономика, прикладная математика и других. В настоящее время дробный математический анализ характеризуется значительным ростом за счет его изучения нашими соотечественниками и зарубежными коллегами (см., например, монографии [1], [2], статьи [3], [4], [5] и др.).

Изначально методы нелинейного функционального анализа применялись и разрабатывались в приложениях к дифференциальным уравнениям такими учеными как Пуанкаре А., Брауэр Н.А., Хопф Г., Шаудер Ю. и др. Данные методы с начала 50-х годов XX века претерпели изменения и в дальнейшем были применены к новым классам дифференциальных уравнений, а также к дифференциальным включениям, этим занимались Красносельский М.А., Крейн С.Г., Борисович Ю.Г., Забрейко П.П., Звягин В.Г., Перов А.И., Садовский Б.Н, Каменский М.И., Обуховский В.В. Развитие данных методов связано в первую очередь с тем, что дифференциальные включения являются удобным

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках проектной части государственной квоты (проект № 1.3464.2017/4.6), Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

аппаратом для описания систем управления, систем с разрывными характеристиками, математической физики, экономики и биологии (см., например, монографии и статьи [6], [7], [8] и др.).

Настоящая работа продолжает исследования в этом направлении, в ней указанные методы применяются для изучения нового класса дифференциальных включений дробного порядка.

Пусть E — сепарабельное банахово пространство, $Kv(E)$ — совокупность его непустых выпуклых компактов. Для $a > 0$, $h > 0$ обозначим

$$\mathcal{D} = C\big([-h,a],E\big), \quad \mathcal{C} = C\big([-h,0],E\big).$$

Для $x \in \mathcal{D}$ определим функцию $x_t \in \mathcal{C}$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in [-h,0]$.

Рассмотрим общую краевую задачу для полулинейного функционально-дифференциального включения дробного порядка

$$D^q x(t) \in Ax(t) + F(t, x_t), \quad t \in [0,a], \tag{1}$$

$$Q\tilde{x} \in Sx, \tag{2}$$

где $q \in (0,1)$, $\tilde{x} \in C\big([0,a],E\big)$, $\tilde{x}(t) = x(t)$, $t \in [0,a]$. В этом включении $A : D(A) \subset E \to E$ — линейный замкнутый оператор в E, порождающий ограниченную C_0 полугруппу $\big\{T(t)\big\}_{t\geq 0}$; обозначим $M = \sup\Big\|\big\{T(t)\big\}\Big\|$, $t \geq 0$. Относительно мультиоператора $F : [0,a] \times \mathcal{C} \to Kv(E)$ будем предполагать следующие условия:
$(F1)$ для всех $x \in \mathcal{C}$ мультифункция $F(\cdot, x) : [0,a] \to Kv(E)$ допускает сильно измеримое сечение;
$(F2)$ для почти всех $t \in [0,a]$ мультиотображение $F(t,\cdot) : \mathcal{C} \to Kv(E)$ полунепрерывно сверху;
$(F3)$ для любого непустого ограниченного $\Omega \subset \mathcal{C}$ найдется функция $\alpha_\Omega \in L^\infty\big([0,a]\big)$ такая, что для почти всех $t \in [0,a]$, $x \in \mathcal{C}$ выполнено

$$\big\|F(t,x)\big\| \leq \alpha_\Omega(t)\big(1 + \|x\|_{\mathcal{C}}\big);$$

$(F4)$ найдется функция $\mu \in L^\infty\big([0,a]\big)$ такая, что для любого ограниченного множества $\Omega \subset \mathcal{C}$ при почти всех $t \in [0,a]$ выполнено

$$\chi\big(F(t,\Omega)\big) \leq \mu(t)\varphi_{\mathcal{C}}(\Omega),$$

где χ — мера некомпактности Хаусдорфа в E, $\varphi_{\mathcal{C}}$ — модуль послойной некомпактности в $\mathcal{C}$

$$\varphi_{\mathcal{C}}(\Omega) = \sup_{t\in[-h,0]} e^{-pt}\chi\big(\Omega(t)\big).$$

Для операторов из граничного условия (2) предполагаются следующие условия:
(Q) $Q : C\big([0,a],E\big) \to \mathcal{C}$ — линейный ограниченный оператор;
(S) мультиотображение $S : \mathcal{D} \to Kv(\mathcal{C})$ является полунепрерывным сверху и переводит каждое ограниченное множество в относительно компактное.

1. Основные понятия

Определение 1. Интегральным решением задачи Коши (1)–(2) на промежутке $[-h, a]$ называется функция $x \in \mathcal{D}$ такая, что $Q\tilde{x} \in Sx$,

$$x(t) = \mathcal{G}(t)x(0) + \int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0, a],$$

где $f(s) \in F(s, x_s)$,

$$\mathcal{G}(t) = \int_0^\infty \xi_q(\theta)T(t^q\theta)d\theta, \quad \mathcal{T}(t) = q\int_0^\infty \theta\xi_q(\theta)T(t^q\theta)d\theta,$$

$$\xi_q(\theta) = \frac{1}{q}\theta^{-1-\frac{1}{q}}\Psi_q(\theta^{-1/q}),$$

$$\Psi_q(\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n-1}\theta^{-qn-1}\frac{\Gamma(nq+1)}{n!}\sin(n\pi q), \quad \theta \in \mathbb{R}^+.$$

Замечание 1. $\int_0^\infty \theta\xi_q(\theta)\, d\theta = \frac{1}{\Gamma(q+1)}$.

Определение 2. Линейный оператор $G : L^\infty([0, a]; E) \to C([0, a]; E)$, определенный соотношением

$$Gf(x) = \int_0^t (t-s)^{q-1}\mathcal{T}(t-s)f(s)ds, \qquad t \in [0, a],$$

называется оператором Коши.

Обозначим через $\mathcal{D}_0$ подпространство $C\big([0, a], E\big)$, состоящее из функций вида $x(t) = \mathcal{G}(t)x(0)$. Определим сужение Q_0 оператора Q на $\mathcal{D}_0$. Будем предполагать, что выполнены следующие условия:
(QS) существует линейный ограниченный оператор $\Lambda : \mathcal{C} \to \mathcal{D}_0$ такой, что

$$(I - Q_0\Lambda)(y - QGf) = 0$$

для всех $x \in \mathcal{D}$, $y \in \mathcal{S}(x)$ и $f \in F(s, x_s)$;
$(\tilde{Q})$ линейный ограниченный оператор $\tilde{Q} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, определенный как $\tilde{Q}c = Q\big((rc)|_{[0,a]}\big)$, является обратимым.

Нетрудно видеть, что при выполнении условия $(\tilde{Q})$ оператор Λ можно задать явным образом

$$\Lambda c = r\Big[\tilde{Q}^{-1}(c)\Big].$$

В предположении, что условие (QS) выполнено, рассмотрим многозначный оператор $\Gamma : \mathcal{D} \to Kv(\mathcal{D})$, заданный соотношением

$$\Gamma(x) = \Lambda S(x) + (I - \Lambda Q)GF(s, x_s).$$

Лемма 1. (см. [9]) *Мультиотображение G является полунепрерывным сверху.*

Лемма 2. *Мультиотображение* Γ *является полунепрерывным сверху.*

Лемма 3. *Каждая неподвижная точка мультиоператора* Γ *имеет вид*

$$x = \Lambda(y - QGf) + Gf \tag{3}$$

и является интегральным решением задачи Коши (1) – (2)*. Если дополнительно выполняется условие* $(\widetilde{Q})$*, то каждое интегральное решение* x *задачи Коши* (1) – (2) *является неподвижной точкой мультиоператора* Γ.

Введем в пространстве $\mathcal{D}$ векторную меру некомпактности $\nu : P(\mathcal{D}) \to \mathbb{R}^2_+$ со значениями в конусе $\mathbb{R}^2_+$, определенную как

$$\nu_{\mathcal{D}}(\Omega) = \max_{D \in \Delta(\Omega)} \big(\varphi_{\mathcal{D}}(\Omega), mod_C(D)\big),$$

где $\Delta(\Omega)$ — совокупность всех счетных подмножеств Ω,

$$\varphi_{\mathcal{D}}(D) = \sup_{t \in [0,a]} e^{-pt} \chi\big(D(t)\big),$$

и константа $p > 0$ выбрана так, что для $d > 0$, удовлетворяющего неравенству

$$\frac{qM \left\|\mu\right\|_{\infty} \big(1 + \|\Lambda\| b\big)}{\Gamma(1+q)} \frac{d^q}{q} < \frac{1}{4}, \tag{4}$$

выполняется следующая оценка

$$\frac{qM \left\|\mu\right\|_{\infty} \big(1 + \|\Lambda\| b\big)}{\Gamma(1+q)} \frac{1}{pd^{1-q}} < \frac{1}{4}. \tag{5}$$

Вторая компонента определенной нами меры некомпактности ν, суть модуль равностепенной непрерывности, который определяется соотношением

$$mod_C(\mathcal{D}) = \lim_{\delta \to 0} \sup_{u \in \mathcal{D}} \max_{|t_1 - t_2| \le \delta} \big\|u(t_1) - u(t_2)\big\|.$$

Лемма 4. *Мультиоператор* Γ *является уплотняющим относительно меры некомпактности* ν.

2. Основные результаты

Теорема 1. *При выполнении условий* $(F1)$, $(F2)$, $(F3)$, $(F4)$, (Q), (QS), $(\widetilde{Q})$, $(H1)$ *множество решений задачи* (1) – (2) *на* $[-h, a]$ *непусто и компактно.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С., Родкина А.Е., Садовский Б.Н.* Меры некомпактности и уплотняющие операторы. Новосибирск: Наука, 1986.

2. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных оторбажений и дифференциальных включений. Издание 2-е, испр. и доп. М.: Книжный дом «Либроком», 2011.

3. *Петросян Г.Г.* Об одной теореме о слабой замкнутости суперпозиционного мультиоператора // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1355-1358.

4. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2001. 231 p.

5. *Ke T.D., Obukhovskii V., Wong N.-C., Yao J.-C.* On a Class of Fractional Order Differential Inclusions with Infinite Delays // Applicable Analysis. 2013. Vol. 92. № 1. P. 115-137.

6. *Obukhovskii V., Yao J.-C.* Some Existence Results for Fractional Functional Differential Equations // Fixed Point Theory. 2010. Vol. 11. № 1. P. 85-96.

7. *Kamenskii M., Obukhoskii V., Petrosyan G., Yao J.-C.* On semilinear fractional order differential inclusions in banach spaces // Fixed Point Theory. 2017. Vol. 18. № 1. P. 269-292.

8. *Обуховский В.В., Петросян Г.Г.* О задаче Коши для функционально-дифференциального включения дробного порядка с импульсными характеристиками в банаховом пространстве // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2013. № 1. С. 192-209.

9. *Петросян Г.Г., Афанасова М.С.* О задаче Коши для дифференциального включения дробного порядка с нелинейным граничным условием // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2017. № 1. С. 135-151.

Поступила в редакцию 29 марта 2018 г.
Прошла рецензирование 10 мая 2018 г.
Принята в печать 5 июня 2018 г.

Афанасова Мария Сергеевна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, аспирант, математический факультет, e-mail: marya.afanasowa@ya.ru

Для цитирования: *Афанасова М.С.* О задаче Коши для функционально-дифференциального включения дробного порядка с общим начальным условием в банаховом пространстве // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 180–186. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-180-186

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-180-186

ON THE CAUCHY PROBLEM FOR A FUNCTIONAL DIFFERENTIAL INCLUSION OF FRACTIONAL ORDER WITH A GENERAL INITIAL CONDITION IN A BANACH SPACE

M. S. Afanasova

Voronezh State University
1 University square, Voronezh 394018, Russian Federation
E-mail: marya.afanasowa@ya.ru

Abstract. In this paper we consider the Cauchy problem for a functional differential inclusion of fractional order with a general initial condition in a Banach space.
Keywords: differential inclusion; the fractional derivative; the Cauchy problem; MNC; fixed point; condensing multimap

REFERENCES

1. Akhmerov R.R., Kamenskiy M.I., Potapov A.S., Rodkina A.E., Sadovskiy B.N. *Mery nekompaktnosti i uplotnyayushchie operatory* [Measures of Non-Compactness and Condensing Operators]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1986. (In Russian).

2. Borisovich Yu.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovskiy V.V. *Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otorbazheniy i differentsial'nykh vklyucheniy* [Introduction to the Theory of Many-Valued Separations and Differential Inclusions]. Moscow, Book House "Librokom" Publ., 2011. (In Russian).

3. Petrosyan G.G. Ob odnoy teoreme o slaboy zamknutosti superpozitsionnogo mul'tioperatora [Theorem on the weak closure of superposition multioperators]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1355-1358. (In Russian).

4. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces*. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 2001. 231 p.

5. Ke T.D., Obukhovskii V., Wong N.-C., Yao J.-C. On a Class of Fractional Order Differential Inclusions with Infinite Delays. *Applicable Analysis*, 2013, vol. 92, no. 1, pp. 115-137.

6. Obukhovskii V., Yao J.-C. Some Existence Results for Fractional Functional Differential Equations. *Fixed Point Theory*, 2010, vol. 11, no. 1, pp. 85-96.

7. Kamenskii M., Obukhoskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. On semilinear fractional order differential inclusions in banach spaces. *Fixed Point Theory*, 2017, vol. 18, no. 1, pp. 269-292.

8. Obukhovskii V.V., Petrosyan G.G. O zadache Koshi dlya funktsional'no-differentsial'nogo vklyucheniya drobnogo poryadka s impul'snymi kharakteristikami v banakhovom prostranstve [On the Cauchy problem for functional differential inclusions of fractional order with impulsive characteristics in a Banach space]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 192-209. (In Russian).

This research was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (projects № 1.3464.2017/4.6, № 14.Z50.31.0037).

9. Petrosyan G.G., Afanasova M.S. O zadache Koshi dlya differentsial'nogo vklyucheniya drobnogo poryadka s nelineynym granichnym usloviem [On the Cauchy problem for a differential inclusion of fractional order with nonlinear boundary conditions]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 1, pp. 135-151. (In Russian).

Received 29 March 2018
Reviewed 10 May 2018
Accepted for press 5 June 2018

Afanasova Mariya Sergeevna, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Post-Graduate Student, Faculty of Mathematics, e-mail: marya.afanasova@ya.ru.

For citation: Afanasova M.S. O zadache Koshi dlya funktsional'no-differentsial'nogo vklyucheniya drobnogo poryadka s obshchim nachal'nym usloviem v banahovom prostranstve [On the Cauchy problem for a functional differential inclusion of fractional order with a general initial condition in a Banach space]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 180–186. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-180-186 (In Russian, Abstr. in Engl.).